

Przedmowa do wydania I	8
Rozdział 1. WIADOMOŚCI WSTĘPNE	11
1.1. Istota i przedmiot mechaniki	11
1.2. Mechanika klasyczna a mechanika relatywistyczna	11
1.3. Klasyfikacja gałęzi mechaniki	14
1.4. Rys historyczny	15
1.5. Mechanika ogólna jako teoria	17
1.6. Działy mechaniki ogólnej	19
Pytania sprawdzające	19
Rozdział 2. WEKTORY I RACHUNEK WEKTOROWY	20
2.1. Geometryczne i analityczne określenie wektora	20
2.2. Działania na wektorach	21
2.3. Funkcje wektorowe	24
2.4. Wektory swobodne i wektory związane z prostą	28
Pytania sprawdzające	32
Rozdział 3. GEOMETRIA MAS	33
3.1. Przedmiot i zagadnienia geometrii mas	33
3.2. Momenty statyczne i określenie środka masy układu punktów materialnych i bryły	35
3.3. Obliczanie momentów statycznych oraz współrzędnych środka masy układu punktów materialnych i bryły	40
3.4. Reguły Pappusa-Guldina	48
3.5. Momenty bezwładności i momenty dewiacji	50
3.6. Obliczanie momentów II rzędu ciał sztywnych	55
3.7. Zmiany macierzy bezwładności bryły przy transformacji układu współrzędnych	61
3.8. Osie główne oraz główne momenty bezwładności bryły w punkcie	71
3.9. Elipsoida bezwładności bryły w punkcie	76
Pytania sprawdzające	78
Rozdział 4. STATYKA UKŁADÓW MECHANICZNYCH	79
4.1. Przedmiot, zadania i metody statyki	79
4.2. Rodzaje oddziaływań mechanicznych	82
4.3. Więzy i rodzaje podpór w układach mechanicznych	84
4.4. Liczba stopni swobody i statyczna niewyznaczalność układów mechanicznych	86
4.5. Redukcja układu oddziaływań mechanicznych	89
4.6. Warunki równowagi układów mechanicznych	96

4.7. Tarcie w statyce układów mechanicznych	99
4.8. Obszary obciążeń i położenia równowagi	102
4.9. Statyczna niewyznaczalność związana z tarciem	105
4.10. Dwoistość zakłócenia równowagi w związku z tarciem	105
4.11. Samohamowność i zakleszczanie	112
4.12. Opory toczenia i przetaczanie	117
4.13. Tarcie opasania	120
4.14. Kratownice płaskie	122
Pytania sprawdzające	129
Rozdział 5. KINEMATYKA PUNKTU	130
5.1. Geometryczny i analityczny opis położenia punktu	130
5.2. Tor punktu w przestrzeni i równanie ruchu punktu po torze	132
5.3. Prędkość i przyspieszenie punktu	138
5.4. Składowe wektorów prędkości i przyspieszenia punktu w układzie walcowym	140
5.5. Składowe wektorów prędkości i przyspieszenia punktu w układzie naturalnym	143
5.6. Ruch prostoliniowy punktu	146
5.7. Ruch punktu w jednorodnym polu przyspieszeń	153
5.8. Ruch punktu w środkowym polu przyspieszeń	155
Pytania sprawdzające	156
Rozdział 6. DYNAMIKA PUNKTU MATERIALNEGO	157
6.1. Wprowadzenie do dynamiki	157
6.2. Dynamika swobodnego punktu materialnego	158
6.3. Ruch punktu pod działaniem siły zależnej od położenia	160
6.4. Ruch punktu pod działaniem siły zależnej od prędkości	166
6.5. Ruch punktu materialnego pod wpływem siły Lorentza	175
6.6. Ruch punktu materialnego pod działaniem siły zależnej od czasu	178
6.7. Dynamika nieswobodnego punktu materialnego	179
6.8. Pęd punktu materialnego i prawo jego zmienności	185
6.9. Kręt punktu materialnego i prawo jego zmienności	188
6.10. Praca i moc siły	193
6.11. Energia kinetyczna punktu materialnego i prawo jej zmienności	197
6.12. Prawo zmienności energii kinetycznej w potencjalnym polu sił	199
Pytania sprawdzające	205
Rozdział 7. DYNAMIKA UKŁADU PUNKTÓW MATERIALNYCH	206
7.1. Określenie i podstawowe właściwości układu punktów materialnych	206
7.2. Równania dynamiki układu punktów materialnych	210
7.3. Pęd układu punktów materialnych i prawo jego zmienności	215
7.4. Prawo ruchu środka masy układu punktów materialnych	218
7.5. Kręt układu punktów materialnych i prawo jego zmienności	222
7.6. Energia kinetyczna układu punktów materialnych i prawo jej zmienności	225
7.7. Prawo zmienności energii kinetycznej układu punktów materialnych w potencjalnym polu sił	229
Pytania sprawdzające	236
Rozdział 8. KINEMATYKA CIAŁA SZTYWNEGO	237
8.1. Opis położenia ciała sztywnego w przestrzeni	237
8.2. Klasyfikacja ruchów ciała sztywnego	242
8.3. Prędkość i przyspieszenie punktów bryły w ruchu dowolnym	244
8.4. Prędkość i przyspieszenie punktów bryły w ruchu postępowym	252

8.5. Prędkość i przyspieszenie punktów bryły w ruchu kulistym	254
8.6. Prędkość i przyspieszenie punktów bryły w ruchu płaskim	259
8.7. Prędkość i przyspieszenie punktów bryły w ruchu śrubowym	269
Pytania sprawdzające	271
Rozdział 9. RUCH ZŁOŻONY PUNKTU MATERIALNEGO	272
9.1. Opis ruchu punktu materialnego w różnych układach odniesienia	272
9.2. Prędkość i przyspieszenie punktu materialnego w ruchu złożonym	275
9.3. Dynamika ruchu względnego punktu materialnego	281
Pytania sprawdzające	292
Rozdział 10. DYNAMIKA CIAŁA SZTYWNEGO	293
10.1. Energia kinetyczna ciała sztywnego	293
10.2. Prawo zmienności energii kinetycznej ciała sztywnego	298
10.3. Pęd ciała sztywnego i prawo jego zmienności	302
10.4. Kręt ciała sztywnego i prawo jego zmienności	306
10.5. Równania ruchu ciała sztywnego wynikające z praw zmienności pędu i krętu	312
10.6. Dynamika bryły w ruchu postępowym	313
10.7. Dynamika bryły w ruchu obrotowym względem osi stałej	314
10.8. Dynamika bryły w ruchu kulistym	326
10.9. Zjawisko giroskopowe	331
10.10. Dynamika bryły w ruchu płaskim	333
10.11. Dynamika toczącego się koła	336
10.12. Dynamika pojazdów	339
Pytania sprawdzające	343
Rozdział 11. ELEMENTY MECHANIKI ANALITYCZNEJ	344
11.1. Motyw podjęcia wątku analitycznego w mechanice ogólnej	344
11.2. Więzy i współrzędne uogólnione układu punktów materialnych	345
11.3. Przemieszczenia wirtualne w układzie punktów materialnych	348
11.4. Zasada prac wirtualnych	350
11.5. Zasada prac wirtualnych a warunki równowagi ciała sztywnego	355
11.6. Zasada d'Alemberta	357
11.7. Równania Lagrange'a II rodzaju	361
Pytania sprawdzające	372
Rozdział 12. ELEMENTARNA TEORIA ZDERZENIA	373
12.1. Siły zderzeniowe	373
12.2. Dynamika punktu materialnego pod działaniem siły zderzeniowej	374
12.3. Zderzenie punktu materialnego z przegrodą	376
12.4. Zderzenie dwóch punktów materialnych	380
12.5. Działanie impulsu siły na ciało sztywne	382
12.6. Działanie impulsu siły na bryłę w ruchu obrotowym	384
12.7. Zderzenie dwu brył w ruchu płaskim	389
Pytania sprawdzające	394
Rozdział 13. DYNAMIKA UKŁADÓW O ZMIENNEJ MASIE	395
13.1. Dynamika punktu materialnego o zmiennej masie	395
13.2. Dynamika bryły o zmiennym momencie bezwładności w ruchu obrotowym względem stałej osi	403
13.3. Równanie ruchu rakiety	405
Pytania sprawdzające	407
Wybrane pozycje literatury	408

Podręcznik obejmuje w zasadzie materiał przedmiotu *mechanika ogólna* prowadzonego w ramach studiów akademickich I stopnia na wydziałach mechanicznych politechnik, ale mogą z niego korzystać studenci innych wydziałów, na których mechanika – również w węższym zakresie – należy do przedmiotów obowiązkowych lub obieralnych. Prezentowany układ, treść i sposób wyłożenia materiału opiera się na moich doświadczeniach związanych z prowadzeniem wykładów i ćwiczeń z zakresu mechaniki na Wydziale Samochodów i Maszyn Roboczych Politechniki Warszawskiej w latach 1978–2003. Wykłady prowadzone były zarówno na jednolitych 5-letnich studiach magisterskich, jak również, po reformie systemu studiów w latach 1996–99 – na studiach akademickich I i II stopnia.

Warto zaznaczyć, że ideą wspomnianej reformy studiów było między innymi rozszerzenie wiedzy leżącej u podstaw umiejętności rozwiązywania współczesnych problemów technicznych – interdyscyplinarnych, często zawierających wątki ekonomiczne, a niemal zawsze – informatyczne. Przy tym podejściu podstawowy kurs mechaniki ogólnej na studiach I stopnia nie mógł zostać „okrojony” pod względem tematycznym. Przeciwnie – należało w nim wyeksponować metody alternatywne, co najwyżej rezygnując z metod, które utraciły znaczenie, oraz czasochłonnych dowodów i wyprowadzeń.

Określając zawartość tej książki, przyjąłem zasadę pełnej odpowiedniości wykładu i podręcznika oraz nieumieszczania tematów nieobowiązkowych (często oznaczanych gwiazdkami), aby nie przerażać Czytelnika samą objętością książki, a zwłaszcza nie zachęcać do pomijania fragmentów tekstu „bez szkody” dla zamierzonego efektu końcowego. Wskazuję przy tym możliwości i korzyści wynikające z wychodzenia poza ramy podręcznika w celu poznania innych przykładów, oswajania się z innymi oznaczeniami i sposobami wyłożenia materiału, a w rezultacie – nabrania dystansu i ukształtowania własnego, krytycznego poglądu na problematykę będącą przedmiotem studiów.

Literatura obejmująca podstawy teoretyczne ruchu i równowagi ciał stałych modelowo traktowanych jako punkty materialne lub bryły sztywne jest bardzo bogata. Wyodrębnia się w niej nurt naukowy, w którym na pierwszy plan wysuwa się

ścisłość matematyczna, czystość teorii i oryginalność ujęcia „z pozostawieniem – jak pisze Huber [1] – na boku wszelkich zastosowań i zagadnień szczegółowych” (na przykład dzieło Lagrange’a „Mechanique Analytique” [2] wydane w Paryżu w roku 1811 nie zawiera ani jednego rysunku). Drugi nurt w mechanice ma charakter dydaktyczny, w znacznej mierze (jeśli nie wyłącznie) służebny wobec zastosowań technicznych, i jako taki koncentruje się na możliwie sprawnym przekazaniu wiedzy i wyćwiczeniu umiejętności niezbędnych do rozwiązywania problemów dotyczących ruchu lub równowagi ciał [3]. W tym nurcie znaczną rolę odgrywają dylematy metodologiczne, wynikające np. z możliwości percepcji poszczególnych części materiału przy postępującym równolegle zaawansowaniu matematycznym, czy też ze stosowania (lub niestosowania) szkolnej dydaktycznej zasady „od szczegółu do ogółu”.

Bogactwo publikacji w zakresie mechaniki ogólnej, zwłaszcza podręczników akademickich, nie znajduje odzwierciedlenia w spisie literatury. Zamieszczone zostały tylko te pozycje, które bezpośrednio wpłynęły na treść tej pracy. Podręczniki [4] i [5] pochodzą z obszaru amerykańskiego. Umożliwią one zainteresowanemu Czytelnikowi zapoznanie się z angielskim nazewnictwem w zakresie mechaniki oraz z nieco odmiennym sposobem prowadzenia wykładu.

Książkę tę traktuję jako podstawę wykładu prowadzonego w sposób tradycyjny. Ze świadomym ryzykiem, ale i przekonaniem o słuszności, przyjąłem zasadę przechodzenia „od ogółu do szczegółu”, od której wyjątkiem jest przejście od punktu materialnego do bryły, a nie na odwrót. Jest to oczywista logiczna konsekwencja przejścia od aksjomatów do praw dowodzonych, i nie powinna budzić zastrzeżeń.

W podręczniku omawiane są działy mechaniki ogólnej: statyka, kinematyka i dynamika, co jednak nie stanowi podstawy podziału przedmiotu na trzy niezależne części, jak to miało miejsce w dawnych ujęciach (np. [6]). Poszczególne rozdziały odpowiadają opisowi ruchu podstawowych modeli układów mechanicznych – punktu materialnego, układu odosobnionych punktów materialnych oraz ciała sztywnego. Ekspozowana jest przy tym jedność trzech podstawowych praw ruchu tych modeli – praw zmienności pędu, krętu i energii kinetycznej. Przypadki zachowawcze traktowane są konsekwentnie jako szczególne przypadki zmienności, a nie jako zasady.

Rozdział poświęcony równowadze układów mechanicznych koncentruje się na redukcji układu oddziaływań mechanicznych, na warunkach równowagi, oraz na zjawiskach związanych z występowaniem tarcia suchego, takich jak obszary położeń równowagi, dwoistość zakłócenia równowagi czy zakleszczanie. Problematyka ta może być wykładana przed geometrią mas, która wymaga większego zaawansowania matematycznego w zakresie rachunku całkowego. Ruch złożony punktu materialnego został potraktowany oddzielnie ze względu na konieczność wcześniejszego pełnego opisu ruchu unoszenia, który należy do kinematyki ciała sztywnego. Osobne miejsce zajmuje problematyka zderzeń, w której istotną,

wspólną dla punktu materialnego i bryły, rolę odgrywa hipoteza restytucji normalnej – fenomenologiczne prawo wywodzące się spoza mechaniki ogólnej.

Tradycyjnie kursy mechaniki ogólnej wykładanej porządkiem geometrycznym i oparte na rachunku wektorowym zawierają elementy mechaniki analitycznej, przynajmniej w części dotyczącej koncepcji przemieszczeń i prac wirtualnych oraz zasady d'Alemberta i równań Lagrange'a [7]. Ta część wykładu wprawdzie mniej opiera się na intuicji, a bardziej na wywodach teoretycznych, ale ma ogromne znaczenie praktyczne. Jest bowiem źródłem zalgorytmizowanych metod budowy równań ruchu układów mechanicznych w możliwie minimalnej liczbie i bez konieczności ich układania dla każdego ciała po myślowym oswojeniu go z więzów. Celem stosunkowo krótkiego przedstawienia elementów mechaniki analitycznej jest, obok wprowadzenia efektywnej metody modelowania matematycznego układów mechanicznych, porównanie dwóch różnych podejść do konstrukcji tych samych w rezultacie równań – metody opartej na ogólnym równaniu mechaniki (zasada d'Alemberta) oraz metody związanej z równaniami Lagrange'a II rodzaju. Rolą tego rozdziału jest również rozbudzenie zainteresowania alternatywnymi podejściami do opisu ruchu, analizą ich przydatności i efektywności, z czego powinna wynikać umiejętność stosowania odpowiednich narzędzi matematycznych i numerycznych w rozwiązywaniu konkretnych problemów w technice. Wykład mechaniki analitycznej zawiera podręcznik [8].

Na treść książki znaczący wpływ wywarli moi nauczyciele i współpracownicy w Instytucie Podstaw Budowy Maszyn Politechniki Warszawskiej – profesor Zbigniew Osiński i profesor Andrzej Tylikowski. Zaznaczam to z wdzięcznością i satysfakcją.

Serdeczne podziękowania składam pani Małgorzacie Sadkowskiej za przygotowanie tekstu w postaci elektronicznej.

Warszawa, marzec 2005 r.

Autor

Rozdział 1

WIADOMOŚCI WSTĘPNE

Ruch jest przyczyną wszelkiego życia
Leonardo da Vinci

1.1. ISTOTA I PRZEDMIOT MECHANIKI

Słowo *mechanika* pochodzi z języka greckiego, podobnie jak terminy *mechanizm* i *maszyna*, używane do określenia wytworzonych przez człowieka urządzeń, których działanie opiera się na ruchu.

Mechanika jest nauką o ruchu ciał materialnych, przy czym ciała te mogą mieć różny stan skupienia (ciała stałe i płyny), różne właściwości fizyczne (np. ciała stałe sprężyste i plastyczne) lub różne cechy modelowe (np. ciała idealnie sztywne i ciała odkształcalne, ciała o ciągłym makroskopowo rozkładzie masy i ciała o masie skupionej). Przedmiotem mechaniki (bez dodatkowego przymiotnika) są matematycznie wyrażone prawa ruchu ciał materialnych, niezależnie od ich rodzaju i właściwości. Mechanika z odpowiednim przymiotnikiem zawężającym oznacza część lub gałąź mechaniki odnoszącą się do specyficznych ciał i ich właściwości lub też do ujęcia praw ruchu i zastosowanego aparatu matematycznego. Klasyfikację mechaniki znajdzie Czytelnik na następnych stronach. Pozwala ona usytuować niniejszy wykład mechaniki ogólnej wśród pokrewnych przedmiotów kierunkowych, pokazać związki między nimi i lepiej zrozumieć ich zawartość tematyczną.

Szczególnym przypadkiem ruchu jest bezruch, zatem w zakres mechaniki wchodzi również badanie stanów równowagi, czyli spoczynku ciał materialnych, bez względu na ich właściwości naturalne lub modelowe.

1.2. MECHANIKA KLASYCZNA A MECHANIKA RELATYWISTYCZNA

Z ruchem dowolnego ciała materialnego wiążą się nierozzerwalnie pojęcia przestrzeni, w której ciało przyjmuje różne położenia, czasu, który upływa i określa kolejne położenia w przestrzeni, oraz układu odniesienia, bez którego odróżnienie

poszczególnych położeń ciała w przestrzeni, podobnie jak opis ruchu, nie byłoby możliwe.

Istnienie układu odniesienia wymaga istnienia drugiego ciała w rozpatrywanej przestrzeni. Ruch jednego ciała opisywany jest w czasie i przestrzeni zawsze względem innego ciała, z którym związany jest układ odniesienia. Układów odniesienia może być zatem bardzo wiele i sprawą umowną jest, z jakiego punktu widzenia (odniesienia) obserwujemy i opisujemy ruch.

Bardzo ważną cechą każdego układu odniesienia, zwykle utożsamianego z ciałem sztywnym (w postaci np. prostokątnego układu osi współrzędnych), jest jego własny ruch względem innego układu odniesienia. Łatwo wyobrazić sobie cały ciąg układów odniesienia dla człowieka poruszającego się np. na pokładzie stacji orbitalnej. Stacja jest układem odniesienia dla astronauty, Ziemia jest układem odniesienia dla stacji, Ziemia porusza się względem Słońca, Słońce względem swej galaktyki itd. Nie ma możliwości (w obecnym stanie wiedzy) określenia absolutnego, końcowego i nieruchomego układu odniesienia. Ruch któregoś z kolei układu odniesienia można uznać za praktycznie nieistotny i zaniedbać go, co doprowadzi do określenia (umownie) nieruchomego układu odniesienia dla rozpatrywanego ruchu. Ze względu na opis ruchu niezwykle ważna jest następująca klasyfikacja układów odniesienia:

- 1) układy nieruchome,
- 2) układy poruszające się ruchem postępowym prostoliniowym ze stałą prędkością (jest to ruch ciała sztywnego, w którym wszystkie punkty mają taką samą prędkość i prędkość ta nie zmienia się w czasie),
- 3) układy poruszające się w inny sposób niż ten, który został określony w punkcie 2 (wystarczy np. zmiana prędkości w czasie lub zróżnicowanie prędkości poszczególnych punktów, co oznacza obrót układu odniesienia).

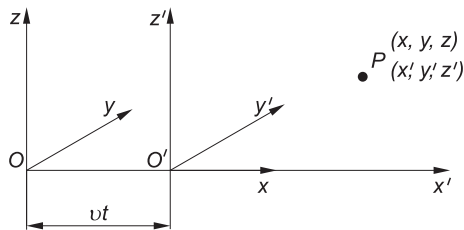
Układy wymienione w punktach 1 i 2 łącznie nazywają się układami inercjalnymi lub układami Galileusza. Równania dynamiki dowolnego ciała w tych układach są identyczne (równania dynamiki zostaną oczywiście określone w dalszej części podręcznika, tu wystarczy skojarzenie ze znanym ze szkolnego kursu fizyki II prawem Newtona).

Każdy układ odniesienia, który względem wybranego układu inercjalnego porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym (tzn. wszystkie jego punkty mają stałą i jednakową prędkość), też jest układem inercjalnym. Układy wymienione w punkcie 3 powyższej klasyfikacji nazywają się układami nieinercjalnymi. Równania dynamiki w układach inercjalnych i nieinercjalnych są odmienne.

Skupmy teraz uwagę na możliwości obserwacji ruchu pewnego ciała w dwóch różnych układach inercjalnych. Niech obserwowane ciało będzie punktem materialnym, a układy inercjalne – dwoma układami współrzędnych prostokątnych, z których jeden $Oxyz$ jest nieruchomy, a drugi $Ox'y'z'$ porusza się względem pierwszego ze stałą prędkością v wzdłuż umownie wybranej osi Ox .

Jak wiadomo (nawet z najprostszego doświadczenia), różne wielkości mechaniczne mogą przedstawiać się różnie w obu układach inercjalnych. Wielkości takie nazywamy względnymi, natomiast te, które jednakowo przedstawiają się w różnych układach inercjalnych, nazywamy wielkościami absolutnymi lub bezwzględnymi. O tym, jaki jest zbiór wielkości absolutnych dla dwóch układów inercjalnych, decyduje obowiązująca dla nich transformacja czasoprzestrzeni, która stanowi związek między współrzędnymi punktu w obu układach, a także odzwierciedla relacje czasu odmierzanego niezależnie w każdym z układów. Właśnie transformacja czasoprzestrzeni stanowi o tym, czy mamy do czynienia z mechaniką klasyczną, mechaniką relatywistyczną, czy też jeszcze inną mechaniką, którą możemy sobie wyobrazić.

Skoncentrujemy się na odróżnieniu mechaniki klasycznej, zwanej też mechaniką Newtona, od mechaniki relatywistycznej, którą wiążemy z Einsteinem. Transformacja czasoprzestrzeni w mechanice klasycznej nosi nazwę transformacji Galileusza, a w mechanice relatywistycznej – transformacji Lorentza.



Rys. 1.1. Ruch układu inercjalnego względem układu nieruchomego (do sformułowania transformacji czasoprzestrzeni)

Załóżmy, że układ prostokątny $Ox'y'z'$ porusza się ze stałą prędkością v względem układu nieruchomego $Oxyz$, wzdłuż osi Ox (rys. 1.1). Dowolny punkt P ma w obu układach współrzędne prostokątne (x, y, z) w chwili t według czasu odmierzanego w układzie nieruchomym oraz współrzędne (x', y', z') w chwili t' zgodnie z czasem odmierzającym w układzie ruchomym. W tab. 1.1 zamieszczono transformację Galileusza i Lorentza oraz przykładowe wielkości absolutne i względne w odpowiadających tym transformacjom mechanikach – klasycznej i relatywistycznej.

Zauważmy, że mechanika Einsteina jest uogólnieniem mechaniki Newtona i prowadzi do nieosiągalnych w mechanice klasycznej rezultatów w przypadku, kiedy stosunek prędkości układu ruchomego do prędkości światła przestaje być pomijalnie mały. Oznacza to, że mechanika klasyczna nie utraciła aktualności, a tylko ograniczony został zakres jej wykorzystania. W zagadnieniach technicznych dotyczących budowy maszyn i pojazdów stosowanie mechaniki klasycznej jest zupełnie wystarczające.

Tabela 1.1

Wielkości absolutne i względne oraz transformacja czasoprzestrzeni w mechanice klasycznej i relatywistycznej

Wielkości fizyczne	Mechanika klasyczna	Mechanika relatywistyczna
Transformacja czasoprzestrzeni wg rys. 1.1	Galileusza $x' = x - vt$ $y' = y$ $z' = z$ $t' = t$	Lorentza $x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ $y' = y$ $z' = z$ $t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$
Wielkości absolutne	przyspieszenie, siła, odstęp czasu, masa, długość odcinka	prędkość światła w próżni c
Wielkości względne	prędkość, pęd, kręt, energia kinetyczna	prędkość, przyspieszenie, siła, masa, energia kinetyczna, odstęp czasu, długość odcinka

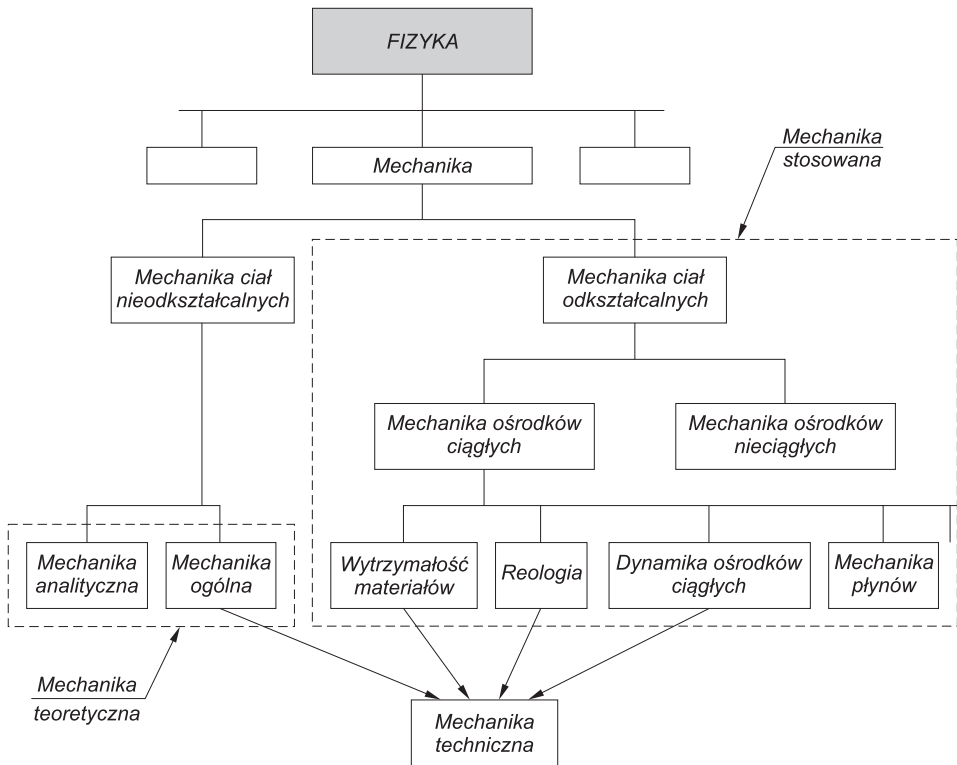
1.3. KLASYFIKACJA GAŁĘZI MECHANIKI

Mechanika jest częścią fizyki. Jako nauka o ruchu zajmuje szczególne miejsce, ponieważ ruch jest najprostszym i najczęstszym zjawiskiem w przyrodzie. Szczególna pozycja mechaniki wynika również z uwarunkowań historycznych, ponieważ człowiek najwcześniej skojarzył i próbował opisywać wzajemne relacje zjawisk związanych z działaniem sił i z ruchem.

Schemat klasyfikacji wewnętrznej mechaniki przedstawionej na rys. 1.2 pozwoli Czytelnikowi zorientować się w usytuowaniu mechaniki ogólnej wśród innych gałęzi mechaniki.

Należy zaznaczyć, że podział wewnętrzny mechaniki ma w dużej mierze charakter umowny i często mechanicy w różny sposób rozumieją jej poszczególne gałęzie. Na przykład, przez mechanikę teoretyczną najczęściej rozumie się mechanikę opisującą prawa ruchu ciał nieodkształcalnych i operującą modelami tych ciał w postaci punktu materialnego, układu punktów materialnych oraz bryły, przy czym za podstawowe uważa się ujęcie analityczne. W niektórych podręcznikach mechanika teoretyczna utożsamiana jest z mechaniką ogólną. Maksymilian T. Huber [1] do mechaniki teoretycznej, obok praw ruchu modeli ciał nieodkształcalnych, zalicza

również opis ruchu kontinuum odkształcalnego, rozumianego jako zbiór punktów materialnych o ciągłym rozkładzie masy.



Rys. 1.2. Klasyfikacja wewnętrzna mechaniki

W tym podręczniku mechanika ogólna jest częścią mechaniki teoretycznej, zawierającą niezbędne elementy ujęcia analitycznego, ale koncentrującą się na wektorowym opisie praw ruchu i równowagi modelowych ciał sztywnych.

1.4. RYS HISTORYCZNY

Wykorzystywanie przez człowieka praw mechaniki (niepisanych) sięga czasów zamierzchłych. Nie wiemy, kiedy po raz pierwszy użyto klina, dźwigni, rolki lub równi pochyłej. Wiadomo jednak, że już kilka tysięcy lat przed naszą erą prowadzono prace budowlane na dużą skalę (piramidy egipskie), które wymagały zdolności transportowych, podnoszenia i obrabiania bloków skalnych i pni drzew. Umiejętności dawnych budowniczych świadczą o rozumieniu przez nich podstawowych

praw mechaniki, w tym również wytrzymałości materiałów, choćby rozumienie to było tylko kojarzeniem obserwowanych doświadczeń.

Historia mechaniki może być pasjonująca sama w sobie, dlatego zachęcam Czytelnika do sięgnięcia do właściwej literatury [9], tu podając w encyklopedycznym skrócie jedynie kilkanaście nazwisk i okresów, z którymi wiążemy istotne osiągnięcia w mechanice teoretycznej i stosowanej.

- ok. 350 r. p.n.e. – Arystoteles – pierwsze pisane prace w zakresie mechaniki
- ok. 250 r. p.n.e. – Archimedes – wprowadzenie pojęcia dźwigni, środka masy ciała, wyporu hydrostatycznego
- II w. n.e. – Ptolemeusz – ruch ciał niebieskich, system geocentryczny,
- XV w. – Leonardo da Vinci – pierwsze prace z zakresu wytrzymałości materiałów, pomiary doświadczalne w mechanice
- XVI w. – Simon Stevin – wprowadzenie pojęcia momentu siły, sumowanie sił o kierunkach prostopadłych
- I poł. XVII w. – Galileusz – wprowadzenie pojęcia przyspieszenia, eksperymenty w polu grawitacyjnym
- I poł. XVII w. – Kartezjusz – wprowadzenie prostokątnego układu współrzędnych do rozwiązywania zadań statyki
- II poł. XVII w. – Isaak Newton – wprowadzenie pojęcia masy jako miary bezwładności, sformułowanie podstawowych praw mechaniki, wprowadzenie i zastosowanie rachunku różniczkowego do opisu ruchu
- II poł. XVIII w. – Leonard Euler, Jean le Rond d’Alembert, Joseph Luis Lagrange – mechanika analityczna, zasady wariacyjne mechaniki
- II poł. XIX w. – Georg D.A. Ritter, Karl Culmann, Luigi Cremona – wyznaczanie sił w kratownicach
- początek XX w. – Albert Einstein – mechanika relatywistyczna, Maksymilian T. Huber – hipoteza wyężenia materiału w ogólnym stanie naprężenia, wytrzymałość ciał anizotropowych
- I poł. XX w. – Stefan Banach – rozwinięcie metod wariacyjnych w mechanice analitycznej

Druga połowa XX wieku to przede wszystkim rozwój mechaniki stosowanej – teorii drgań i stateczności ruchu, niesprężystych właściwości materiałów, badania sprzężeń elektromagnetomechanicznych, zastosowania materiałów nowej generacji, w tym kompozytów i materiałów aktywnych.

Na początku XXI wieku zainteresowania mechaników koncentrują się wokół układów „inteligentnych”, adaptujących się do warunków pracy, na nowych materiałach, w tym kompozytowych i gradientowych, oraz na układach mechatronicznych, których koncepcja i działanie wymagają podejścia interdyscyplinarnego, obejmującego mechanikę, elektronikę, informatykę i automatykę.

DYNAMIKA PUNKTU MATERIALNEGO

6.1. WPROWADZENIE DO DYNAMIKI

Dynamika dotyczy związków przyczynowo-skutkowych między oddziaływaniami mechanicznymi i ruchem ciał poddanych tym oddziaływaniami. Można powiedzieć, że dynamika jest zasadniczą częścią mechaniki, a wszystko co nie jest dynamiką, jest wobec dynamiki pomocnicze lub z niej wynika.

W tej części wykładu zajmiemy się dynamiką punktu materialnego. Będzie to pierwszy, ale bardzo ważny krok na drodze do dynamiki układu punktów materialnych, ciała sztywnego oraz układów mechanicznych składających się z punktów materialnych i brył.

Przypomnijmy, że punkt materialny jest modelowym ciałem utożsamianym z punktem geometrycznym, w którym skupiona jest materia o skończonej masie. Mówiąc o ruchu punktu materialnego, niekoniecznie myślimy o ciele, które ma nieskończenie małe wymiary w przestrzeni. Często za punkt materialny uważamy ogromne rozmiarami ciało, jak np. Ziemię czy Słońce. Jakże zatem jest kryterium modelowania ciała za pomocą punktu materialnego? Tym kryterium jest dopuszczalność pominięcia efektów związanych z obrotem ciała mającego skończone wymiary. To samo ciało w jednym zagadnieniu dynamicznym może być traktowane jako punkt materialny, w innym takie modelowanie byłoby niedopuszczalnym uproszczeniem. Jeśli na przykład badane są właściwości trakcyjne lokomotywy, to wystarczy ją potraktować jako punkt materialny, jeśli natomiast interesuje nas ruch lokomotywy po wykojeniu się z toru, konieczne jest przyjęcie modelu w postaci bryły sztywnej.

Tak więc, problem modelowania poruszającego się ciała jest bardzo ważny i od niego zależy, jakie prawa mechaniki należy zastosować, aby zbadać ruch, uwzględniając wszystkie istotne jego właściwości.

W dalszym ciągu będziemy się koncentrować na prawach dynamiki punktu materialnego przyjmując, że modelowanie poruszającego się ciała zostało przeprowadzone poprawnie.

W kinematyce punktu nie występuje pojęcie obrotu, zatem położenie punktu w przestrzeni jest jednoznacznie określone przez jego wektor wodzący. Oddzia-

ływaniami mechanicznymi odpowiadającymi punktowi materialnemu są siły tworzące układ zbieżny. Przypomnijmy, że w aksjomatach mechaniki (rozdz. 1.5) do oddziaływań mechanicznych zaliczyliśmy również momenty swobodne, które jednak dotyczą ciał sztywnych i wiążą się z problemem redukcji oddziaływań mechanicznych w przypadku bryły.

UWAGA

Jeśli za pomocą punktu materialnego modelowane jest ciało o skończonych wymiarach, na które działa układ sił niezbieżnych, to zbieżność sił można uzyskać przenosząc równolegle wszystkie siły do środka masy ciała. W ścisłym związku z takim działaniem jest prawo ruchu środka masy bryły, o którym będzie mowa w rozdz. 10.

W dynamice punktu materialnego sumowanie geometryczne sił działających na punkt jest zawsze możliwe, a skutek sumy sił jest odpowiednią sumą skutków wywoływanych przez każdą siłę z osobna.

6.2. DYNAMIKA SWOBODNEGO PUNKTU MATERIALNEGO

Punkt materialny nazywamy swobodnym, jeśli jego ruchu w przestrzeni nie krepują żadne ograniczenia. Jeśli istnieje jakiekolwiek ograniczenie nałożone na ruch, to punkt nazywamy nieswobodnym. Ewentualne ograniczenia ruchu punktu, zwane więzami, omówimy w następnym podrozdziale.

Wektorowe równanie ruchu swobodnego punktu materialnego wynika bezpośrednio z II prawa Newtona, a więc z aksjomatów mechaniki klasycznej (patrz rozdział 1 – Wiadomości wstępne). Równanie to ma postać

$$m\vec{p} = \vec{F}, \quad (6.1)$$

gdzie m jest masą punktu materialnego, \vec{p} wektorem przyspieszenia, a \vec{F} oznacza sumę geometryczną wszystkich sił działających na punkt

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (6.2)$$

Dekompozycja wektora \vec{F} na jego składowe \vec{F}_i ma swoje podłoże fizyczne. Siły \vec{F}_i mogą mieć różne pochodzenie (siły napędowe, opory ruchu etc.) i w konsekwencji w różny sposób wpływać na ruch.

Równanie ruchu może być rzutowane na osie dowolnego układu współrzędnych. Spośród wielu możliwych układów wymieńmy trzy, o których była również mowa w kinematyce punktu (rozdz. 5).

W układzie kartezjańskim nieruchomym wektory siły i przyspieszenia mają współrzędne odpowiednio $\vec{p} = [\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}]$, $\vec{F} = \vec{F}[F_x, F_y, F_z]$, zatem równanie wektorowe (6.1) można przedstawić w postaci trzech równań skalarnych:

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z. \quad (6.3)$$

W układzie osi prostokątnych związanych ze współrzędnymi walcowymi (ρ, τ, z) przyspieszenie ma współrzędne $\vec{p}[p_\rho, p_\tau, p_z]$ (5.26), a skalarne równania ruchu mają postać:

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) = F_\rho, \quad m(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}) = F_\tau, \quad m\ddot{z} = F_z, \quad (6.4)$$

gdzie kierunki ρ i τ oznaczają odpowiednio kierunek radialny i transwersalny, z – kierunek pokrywający się z osią Oz układu kartezjańskiego.

W układzie prostokątnych osi odpowiadających kierunkom naturalnym (styczna do toru, normalna główna do toru, binormalna) przyspieszenie ma współrzędne $\vec{p} = \vec{p}\left[\frac{dv}{dt}, \frac{v^2}{R}, 0\right]$, a równania ruchu przyjmują postać:

$$m\frac{dv}{dt} = F_t, \quad m\frac{v^2}{R} = F_n, \quad 0 = F_b. \quad (6.5)$$

Widzimy więc, że w ruchu punktu swobodnego wektor siły leży zawsze w płaszczyźnie ściśle stycznej do toru.

Niezależnie od wyboru układu współrzędnych, równanie ruchu (6.1) można rozpatrywać z dwóch punktów widzenia:

a) Zadany jest ruch, tzn. zadana jest funkcja promienia wodzącego $\vec{r} = \vec{r}(t)$; równanie ruchu (6.1) służy wówczas do wyznaczenia siły \vec{F} powodującej ruch

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (6.6)$$

Tak sformułowane zagadnienie nosi nazwę pierwszego zadania dynamiki punktu.

b) Zadana jest siła \vec{F} , a równanie ruchu (6.1) jest równaniem różniczkowym z niewiadomą funkcją $\vec{r} = \vec{r}(t)$

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}.$$

Aby rozwiązanie $\vec{r}(t)$ było jednoznaczne, do powyższego równania należy dołączyć warunki początkowe, które w formie wektorowej mają postać:

$$\vec{r}(0) = r_0, \quad \frac{d\vec{r}}{dt}(0) = \vec{v}_0, \quad (6.7)$$

gdzie \vec{r}_0 i \vec{v}_0 są zadanymi wektorami położenia i prędkości początkowej.

Tak postawione zagadnienie nazywa się drugim zadaniem dynamiki (porównaj zadawanie ruchu w kinematyce punktu sposobem prostym i odwrotnym).

Zastanówmy się teraz, od czego może zależeć wektor siły \vec{F} działającej na punkt materialny w czasie jego ruchu. Wyodrębnimy trzy przypadki:

- siła zależna od położenia punktu $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$,
- siła zależna od prędkości punktu $\vec{F} = \vec{F}(\vec{v})$,
- siła zależna od czasu $\vec{F} = \vec{F}(t)$.

W każdym z wymienionych przypadków siła ma inne pochodzenie fizyczne.